მარიამ ავალიშვილი

ნათელა ზირაქაშვილი

ლ ო გ ი კ ა

(სალექციო კურსი)

საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა

2013

მ.ავალიშვილი, ნ. ზირაქაშვილი, ლოგიკა, თბილისი, საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2013, 204 გვ. ISBN 9789994050734

ლოგიკის ამ კურსში, რომელიც წარმოადგენს გამოყენებით ლოგიკას, განხილულია მათემატიკური ლოგიკის ძირითადი ცნებები, მეთოდები და დებულებები და მათი არსებითი გამოყენებები პრაქტიკულ საქმიანობაში. გარდა ამისა, წარმოდგენილია პრაქტიკული ამოცანის მოდელირება მათემატიკური ლოგიკის ენაზე და ბოლოს განხილულია ბულის ალგებრის კანონები და თეორემები, რომლებიც ზუსტად ასახავენ კომუტაციური სქემების კანონზომიერებებს.

რედაქტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,

პროფესორი მ. ავალიშვილი

რეცენზენტი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
პროფესორი ხ. რუხაია

შინაარსი

თავი I

შესავალი

§ 1.1. ლოგიკის საგანი.

ლოგიკა არის მეცნიერება მსჯელობის კვლევის შესახებ.

ლოგიკა - კლასიკური ბერძნული სიტყვაა λόγος (logos) - თავდაპირველად ნიშნავდა სიტყვას, ან რაიმე ნათქვამს, შემდეგ კი ფიქრის ან აზრის მნიშვნელობა მიეცა, ხშირად მოიხსენიება, როგორც არგუმენტთა შესწავლა, თუმცა მისი ზუსტი განსაზღვრება დღემდე ფილოსოფოსთა დისკუსიის საგანია. ნებისმიერი გაგებით, ლოგიკოსთა ამოცანაა მართალი და მცდარი დედუქციების შესწავლა და "კარგი" არგუმენტების "ცუდისგან" განსხვავების დადგენა.

ლოგიკა, როგორც მეცნიერება, იკვლევს არგუმენტების სტრუქტურას, კლასიფიცირებას უკეთებს რა მათ სპეციალურად შემუშავებული სქემების მიხედვით. მაშასადამე, ლოგიკა შეიძლება ყოვლისმომცველი გახდეს და მასში შედის მოსაზრებანი ალბათობასა და მიზეზ-შედეგობრიობაზე. ლოგიკის სწავლების საგანია ასევე მცდარი არგუმენტების სტრუქტურა და პარადოქსები.

ტრადიციულად ლოგიკა ისწავლებოდა, როგორც ფილოსოფიის განშტოება. მე-19 საუკუნის შუა წლებიდან ლოგიკა ისწავლებოდა მათემატიკაში, ხოლო უფრო მოგვიანებით კი კომპიუტერულ მეცნიერებაში.

მათემატიკური ლოგიკის დამაარსებელი არის ბრიტანელი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი ჯორჯ ბული (1815-1864). 1847 წელს გამოვიდა მისი წიგნი *ლოგიკის მათემატიკური ანალიზი.*

მათემატიკური ლოგიკა (თეორიული ლოგიკა, სიმბოლური ლოგიკა) – მათემატიკის ერთ–ერთი დარგია, რომელიც სწავლობს დამტკიცებებსა და მათემატიკის საფუძვლების საკითხებს. თანამედროვე ლოგიკის საგანს სხვადასხვანაირად განმარტავენ. ყველა ეს გასხვავებული განმარტება ერთმანეთს არ ეწინააღმდეგება, ისინი ერთმანეთს ავსებენ.

ლოგიკა გამოიყენება პროგრამირებაში, ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას პროგრამული უზრუნველყოფისა და აპარატული საშუალებების ანალიზსა და გამონათქვამთა ლოგიკის ავტომატიზაციაში. ამიტომ მას ზოგჯერ თვლიან თეორიული ინფორმატიკის ნაწილად. ამ პერიოდიდან დაწყებული გამონათქვამთა ლოგიკა თამაშობს მთავარ როლს ინტელექტუალურ ყოფაქცევაში, ლოგიკა მჭიდროდაა დაკავშირებული ხელოვნურ ინტელექტთან.

§ 1.2 ხელოვნური ინტელექტი, მათემატიკური ლოგიკა და თეორემათა დამტკიცება.

პირველი თანამედროვე გამომთვლელი მანქანების გამოჩენის შემდეგ ფანტასტიკური სისწრაფით განვითარდა მანქანური ტექნოლოგიბი. მათგან მოითხოვებოდა როგორც სხვადასხვა მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა, ასვე ე.წ ინტელექტუალური ამოცანების გადაწყვეტაც. ამის მაგალითს წარმოადგენს პროგრამირება სისტემის შედგენაზე, რომლითაც ხდება კითხვებზე პასუხის გაცემა და თეორემების დამტკიცება.

ხელოვნური ინტელექტი – ესაა გამოთვლითი მათემატიკის სფერო, რომელიც ასეთ ამოცანებს შეისწავლის [Ernst and Newel, 1969; Feigenbaum and Feldman, 1963; Nilsson, 1971].

60–იანი წლების მეორე ნახევარში ხელოვნური ინტელექტის სფეროში განსაკუთრებით გაიზარდა ინტერესი თეორემათა მანქანური დამტკიცებისადმი. ჯ.ა. რობინსონის ფუძემდებლური სტატიისა და რეზოლუციის მეთოდის განვითარების შემდეგ გადადგმული იქნა მნიშვნელოვანი ნაბიჯი თეორემათა კომპიუტერული დამტკიცების მიმართულებით.

არსებობს სიმბოლური ლოგიკის შესწავლის მრავალი მიმართულება. ტრადიციულად ის შეისწავლება ფილოსოფიური და მათემატიკური მიმართულებით. ჩვენ გვაინტერესებს მათემატიკური ლოგიკის გამოყენება ინტელექტუალური რთული პრობლემების გადასაწყვეტად. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ გვინდა მისი გამოყენება ამოცანის წარმოსადგენად (ლოგიკურ სიმბოლოებში ჩასაწერად) და მისი ამონახსნების მისაღებად.

მოვიყვანოთ რამოდენიმე მარტივი მაგალითი, რათა ვაჩვენოთ თუ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ მათემატიკური ლოგიკა ამოცანის ჩასაწერად.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვთქვათ გვაქვს შემდეგი ფორმულირებები:

F_1: თუ ცხელა და ნესტია, მაშინ იწვიმებს.

F_2: თუ ნესტია, მაშინ ცხელა.

F_3: ამჟამად ნესტია.

კითხვა: იწვიმებს?

ქართულად ჩაწერილი ამ ფორმულირებების ლოგიკური ფორმულებით ჩასაწერად გამოვიყენოთ სიმბოლოები P, Q და R, რომლებიც აღნიშნავენ, შესაბამისად, „ცხელა“, „ნესტია“ და „იწვიმებს“. გვჭირდება რამოდენიმე ლოგიკური კავშირი. „და“–ს ჩასაწერად გამოიყენება $\wedge$, „თუ ... , მაშინ“–ის ჩასაწერად გამოიყენება $\rightarrow$. მაშინ ზემოთ მოყვანილი სამი მონაცემი ჩაიწერება ასე:

F_1 : $[P \wedge Q] \rightarrow R$,

F_2 : $Q \rightarrow R$,

F_3 : Q.

ამრიგად, ქართულ ენაზე ჩაწერილი ფორმულირებები გადავიყვანეთ ლოგიკური ფორმულების ენაზე. მოგვიანებით ვნახავთ, რომ თუ F_1, F_2 და F_3 ჭეშმარიტია, მაშინ F_4 : R ფორმულაც ჭეშმარიტია. ამიტომ ვამბობთ, რომ F_4 ლოგიკურად გამომდინარეობს F_1, F_2 და F_3– დან, ე.ი. იწვიმებს.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. გვაქვს შემდეგი ფორმულირებები:

F_1: სოკრატე ადამიანია.

F_2: ყოველი ადამიანი მოკვდავია.

იმისათვის რომ ჩავწეროთ F_1 და F_2, უნდა შემოვიღოთ ახალი ცნება, რომელსაც პრედიკატი ეწოდება. ჩავთვალოთ, რომ $P(x)$ და $Q(x)$ აღნიშნავს, შესაბამისად, „ x ადამიანია“ და „ x მოკვდავია“. აგრეთვე „ყველა x –თვის“-ის ჩასაწერად გამოიყენება პრედიკატი $(\forall x)$, მაშინ მოყვანილი ფორმულირებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

F_1: P (სოკრატე)

$$F_2: (\forall x)\left(P(x) \to Q(x)\right).$$

მოგვიანებით ვნახავთ, რომ F_1 და F_2 –დან ლოგიკურად გამომდინარეობს

F_3 : Q (სოკრატე),

რაც ნიშნავს, რომ სოკრატე მოკვდავია.

ამ ორ მაგალითში არსებითად დამტკიცებულია, რომ რაიმე ფორმულა ლოგიკურად გამომდინარეობს სხვა ფორმულებიდან. ფორმულირებას, რომ ფორმულა ლოგიკურად გამომდინარეობს ფორმულებიდან, ვუწოდებთ თეორემას. იმის ჩვენებას, რომ თეორემა არის ჭეშმარიტი, ე.ი. რომ ფორმულა ლოგიკურად გამომდინარეობს სხვა ფორმულებისაგან, ეწოდება თეორემის დამტკიცება. თეორემათა მანქანური დამტკიცების პრობლემა მდგომარეობს იმ მანქანური მეთოდების განხილვაში, რომლითაც მოიძებნება თეორემათა დამტკიცება.

არსებობს მრავალი ამოცანა, რომელიც მოხერხებულად გარდაიქმნება თეორემათა დამტკიცების ამოცანაში. ჩამოვთვალოთ რამოდენიმე მათგანი.

1. *კითხვა-პასუხის სისტემაში* ფორმულირებები ჩაიწერება ლოგიკური ფორმულებით. მაშინ იმისათვის, რომ ვუპასუხოთ კითხვაზე, გამოვიყენებთ რა ამ ფორმულირებებს, ვაჩვენებთ, რომ პასუხის სათანადო ფორმულა გამოდის ამ ფორმულირებების შესაბამისი ფორმულებიდან.
2. *პროგრამის ანალიზის ამოცანაში* ჩვენ შეგვიძლია პროგრამის შესრულების აღწერა A ფორმულით, ხოლო პირობა, რომ პროგრამამ დაამთავრა მუშაობა, სხვა B ფორმულით. მაშინ იმის შემოწმება, რომ პროგრამამ დაამთავრა მუშაობა, ექვივალენტურია იმის დამტკიცებისა, რომ B ფორმულა გამომდინარეობს A ფორმულიდან.
3. *გრაფების იზომორფიზმის პრობლემაში* ჩვენ გვინდა ვიცოდეთ იზომორფულია თუ არა გრაფი სხვა გრაფის ქვეგრაფის. ეს პრობლემა წარმოადგენს არა მხოლოდ მათემატიკურ ინტერესს, ეს პრობლემა პრაქტიკულია. მაგალითად ორგანული ნაერთი შეიძლება აღიწეროს გრაფით. ამიტომ იზომორფიზმის პრობლემა არის იმის შემოწმება, რომ არის თუ არა რაიმე ორგანული ნაერთის სტრუქტურა სხვა ორგანული ნაერთის სტრუქტურის ქვესტრუქტურა. ამის ამოსახსნელად ჩვენ შეგვიძლია გრაფის ფორმულებით აღწერა. ამრიგად, ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბდეს როგორც ამოცანა იმის დასამტკიცებლად, რომ გრაფის ფორმულა გამომდინარეობს სხვა გრაფის ფორმულიდან.
4. *მდგომარეობის გარდაქმნის ამოცანაში* არის მდგომარეობათა კრებული და ოპერატორების (მდგომარეობაზე) კრებული. როცა ერთ–ერთი