გია ავალიშვილი ♦ მარიამ ავალიშვილი

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

I ნაწილი

საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი – 2011

გ. ავალიშვილი, მ. ავალიშვილი, მათემატიკა ეკონომისტებისათვის, I ნაწილი. თბილისი, საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2011, 302 გვ.
ISBN 978-999-40-50-86-4

წიგნში "მათემატიკა ეკონომისტებისათვის, I ნაწილი" განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, კომბინატორიკის, კომპლექსური რიცხვების, ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების და მწკრივების, ერთი ცვლადის ფუნქციასთან და მის უწყვეტობასთან დაკავშირებული მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებები და დებულებები. მათემატიკური მეთოდების აღწერასთან ერთად დიდი ყურადღება ეთმობა მათ გამოყენებას ეკონომიკური ამოცანების გამოსაკვლევად.

წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური სპეციალობის სტუდენტებისათვის და ეკონომისტებისათვის, რომელთაც სურთ დაეუფლონ მათემატიკური ანალიზის საფუძვლებს. ამავე დროს წიგნი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ზუსტი, საბუნებისმეტყველო და საინჟინრო სპეციალობის სტუდენტების მიერ მათემატიკური ანალიზის შესაბამისი საკითხების შესასწავლად და ეკონომიკაში მათემატიკური მეთოდების გამოყენების გასაცნობად.

რედაქტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი **მ. ავალიშვილი**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **დ. გორდეზიანი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **რ. ომანაძე**

შინაარსი

შესავალი

თანამედროვე მეცნიერების მრავალი დარგის ინტენსიური განვითარება არსებითად არის დაკავშირებული გამოკვლევებში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებასთან. რთული პროცესების და ობიექტების მათემატიკური ცნებების საშუალებით აღწერა საშუალებას აძლევს შესაბამისი დარგის მკვლევარებს მკაფიოდ ჩამოაყალიბონ ძირითადი ამოცანები, რაოდენობრივად აღწერონ ურთიერთკავშირი სხვადასხვა მახასიათებლებს შორის, ზოგად მათემატიკურ დებულებებზე დაყრდნობით მიიღონ ახალი დასკვნები გამოსაკვლევი ობიექტის შესახებ, მოახდინონ პროცესების მიმდინარეობის რაოდენობრივი აღწერა და მისი პროგნოზი. მათემატიკური აპარატის გამოყენებით რეალური ობიექტების შესწავლა ეფუძნება მის ფორმალიზებულ აღწერას - მათემატიკურ მოდელს, რომელშიც აღწერის სიზუსტიდან გამომდინარე უნდა აისახოს ობიექტის მახასიათებელი ყველა ძირითადი თვისება და ამავე დროს მოდელი არ უნდა გადაიტვირთოს მეორეხარისხოვანი ფაქტორების გათვალისწინებით. აქედან გამომდინარე, პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მეთოდებით შესწავლა მკვლევარისაგან მოითხოვს, როგორც შესაბამისი დარგის მეთოდების და მიდგომების ღრმა ცოდნას, ასევე საფუძვლიან მათემატიკურ განათლებას, რათა წარმატებით იქნეს გამოყენებული მათემატიკის უნივერსალური აპარატი და მისი ზოგადი ლოგიკურად მკაცრად დასაბუთებული დებულებები რეალური ობიექტების შესახებ დასკვნების მისაღებად.

განსაკუთრებით საინტერესო და მნიშვნელოვანია მათემატიკური მეთოდების გამოყენება ეკონომიკური ამოცანების შესწავლისას, რაც წარმოადგენს მათემატიკური და ეკონომიკური მეცნიერებების ერთობლივი კვლევის აქტუალურ მიმართულებას. უძველესი დროიდან ადამიანი ეკონომიკური საქმიანობის წარმართვისას იყენებდა მათემატიკის ისეთ ფუნდამენტურ ცნებას, როგორიცაა რიცხვი. ადამიანის ეკონომიკური საქმიანობის გაფარ-

თოებამ, მზარდმა მოთხოვნილებებმა და კონკურენციამ განაპირობა მათემატიკის როლის გაზრდა და იმ მეთოდების გართულება, რომლებიც აუცილებელი იყო ეკონომიკური ამოცანების გადასაწყვეტად. თანამედროვე დიდი ეკონომიკური პროექტების განხორციელება შეუძლებელია შესაბამისი საკმარისად რთული მათემატიკური გაანგარიშების გარეშე. უნდა აღინიშნოს, რომ ეკონომიკური ამოცანების შესწავლის შედეგად წარმოიქმნა და ინტენსიურად ვითარდება მათემატიკის ახალი მიმართულებები. მათემატიკის ფართო გამოყენება ეკონომიკაში მოითხოვს ეკონომისტებისაგან მათემატიკის ძირითადი ცნებების და მეთოდების ცოდნას, რომლებიც აუცილებელია თანამედროვე რთული ეკონომიკური ამოცანების მათემატიკური მეთოდებით გამოკვლევისათვის.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, თანამედროვე მოთხოვნების შესაბამისად სრულფასოვანი უმაღლესი განათლების მისაღებად ეკონომიკური სპეციალობის სტუდენტებისაგან მოითხოვება ძირითადი მათემატიკური ცნებების ათვისება და მათი გამოყენების უნარ-ჩვევების განვითარება. ამ მიზანს ემსახურება წინამდებარე სახელმძღვანელო, რომელიც განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური სპეციალობების სტუდენტებისათვის და ეკონომისტებისათვის, რომელთაც სურთ აიმაღლონ მათემატიკური განათლების დონე.

სახელმძღვანელო შედგება სამი ნაწილისაგან და მასში გადმოცემულია ერთი და მრავალი ცვლადის ფუნქციებთან დაკავშირებული ძირითადი ცნებები, დებულებები და წრფივი ალგებრის საფუძვლები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკური ამოცანების შესწავლისას. სახელმძღვანელოს დაწერისას ჩვენ ძირითად მიზანს წარმოადგენდა მათემატიკური ანალიზის და წრფივი ალგებრის საფუძვლების მიწოდება ეკონომიკური ამოცანების განხილვის საშუალებით, რაც ჩვენი აზრით მნიშვნელოვნად გააადვილებს ეკონომისტებს მათემატიკური ცნებების ათვისებას და ამავე დროს დააინტერესებს მათ მათემატიკის გამოყენების შესაძლებლობით ეკონომიკური ამოცანების გამოკვლევებში. იმისათვის, რომ სახელმძღვანელო არ გადაგვეტვირთა რთული და

საწყის ეტაპზე ეკონომისტებისათვის ნაკლებად მნიშვნელოვანი მათემატიკური მსჯელობებით, სახელმძღვანელოში გამოტოვებულია ზოგიერთი თეორემის რთული, მკაცრი დამტკიცება და ძირითადი ყურადღება გადატანილია მათემატიკური დებულებების გამოყენებაზე.

ეს წიგნი წარმოადგენს ეკონომისტებისათვის მათემატიკის სახელმძღვანელოს პირველ ნაწილს და შეიცავს სიმრავლეთა თეორიის, რიცხვითი მიმდევრობების, ერთი ცვლადის ფუნქციის და მის უწყვეტობასთან დაკავშირებულ ცნებებს და დებულებებს. იმისათვის, რომ წიგნი ხელმისაწვდომი გამხდარიყო სხვადასხვა დონის მათემატიკური მომზადების მქონე მკითხველისათვის, ამიტომ წიგნის დაწერისას ვგულისხმობდით, რომ მკითხველს გააჩნია მინიმალური მათემატიკური განათლება საშუალო სკოლის პროგრამის მოცულობით. შესაბამისად, მათემატიკური ანალიზის საფუძვლების შესწავლა წიგნში იწყება მოსამზადებელი პირველი თავით, სადაც განხილულია სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ძირითადი ცნებები. მეორე და მესამე თავები ეთმობა რიცხვითი მიმდევრობების შესწავლას. აღნიშნული მასალის უკეთ ასათვისებლად განხილულია ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი მარტივი მაგალითი, ხოლო შემდეგ მოყვანილია მიმდევრობის და მისი ზღვრის განმარტებები. განხილულია მიმდევრობის სხვადასხვა სახეები, მიმდევრობის ზღვრის თვისებები და მისი გამოთვლის მეთოდები. მოყვანილია რიცხვითი მწკრივის და მისი კრებადობის ცნებები, რიცხვითი მწკრივის კრებადობის შესახებ ძირითადი მათემატიკური დებულებები და მათი გამოყენება. აგრეთვე განხილულია კომპლექსური რიცხვის ცნება და მისი თვისებები. კომპლექსური რიცხვები გამოიყენება სახელმძღვანელოს მეორე ნაწილში დიფერენციალური განტოლებების განხილვისას და ამიტომ შესაბამისი მასალის გაცნობა პირველი ნაწილის შესწავლისას აუცილებელი არ არის. წიგნის მეოთხე თავი მთლიანად ეთმობა ფუნქციის ცნების შესწავლას. მოყვანილია, როგორც ნამდვილი ცვლადის ფუნქციის, ასევე აბსტრაქტული ფუნქციის განმარტება. განხილულია წრფივი ფუნქციის თვისებე-

ბი, მათი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და წრფივი ფუნქციების გამოყენებით ჩატარებულია ზოგიერთი ეკონომიკური ამოცანის ანალიზი შესაბამის მათემატიკურ მოდელზე დაყრდნობით. შემოტანილია წერტილში ფუნქციის ზღვრის ცნება, აღწერილია მისი თვისებები და გამოთვლის მეთოდები. მოყვანილია ფუნქციის უწყვეტობის განმარტება, წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია, ფუნქციის ასიმპტოტების განმარტება და მათი პოვნის ალგორითმი. აღწერილია ფუნქციის გრაფიკის სქემატურად აგების მეთოდები.

წიგნში მოყვანილი მათემატიკური ცნებების და მეთოდების უკეთ ასათვისებლად ყველა მნიშვნელოვან საკითხზე დაწვრილებით გარჩეულია შესაბამისი ამოცანები და თითოეული პარაგრაფის ბოლოს მოყვანილია სავარჯიშოები, რომელთა შესრულება მკითხველს საშუალებას მისცემს შეამოწმოს გარჩეული მასალის ათვისების დონე და დაეხმარება უფრო ღრმად გაიაზროს შესაბამისი მათემატიკური ცნებები და დებულებები.

ჩვენ იმედი გვაქვს, რომ წინამდებარე სახელმძღვანელო დაეხმარება მკითხველს დაეუფლოს ეკონომიკურ გამოკვლევებში ფართოდ გავრცელებული მათემატიკური აპარატის საფუძვლებს და უბიძგებს მას უფრო რთული მათემატიკური მეთოდების შესწავლისაკენ, რომელთა ცოდნა და გამოყენება ხშირად აუცილებელი და მნიშვნელოვანია თანამედროვე კონკურენტულ ეკონომიკურ გარემოში წარმატების მისაღწევად.

I თავი

სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ელემენტები

§ 1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე

სიმრავლე წარმოადგენს განსხვავებულ ობიექტთა ერთობლიობას, რომელიც შედგენილია გარკვეული წესის მიხედვით. ნებისმიერი ობიექტისათვის შესაძლებელია იმის დადგენა არის თუ არა ის ამ სიმრავლის ელემენტი.

სიმრავლის შემადგენელ ობიექტებს ***სიმრავლის ელემენტები*** ეწოდება. თუ სიმრავლეს ელემენტები არ გააჩნია, მაშინ მას ***ცარიელი სიმრავლე*** ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მაგალითად, შეგვიძლია განვიხილოთ უნივერსიტეტის სტუდენტთა სიმრავლე, რომლის ელემენტებს წარმოადგენენ უნივერსიტეტის სტუდენტები, ან ბიბლიოთეკის მიერ უკანასკნელი ერთი თვის განმავლობაში შეძენილი წიგნების სიმრავლე, რომლის ელემენტები იქნება წიგნები და სხვა.

ვინაიდან სიმრავლის ელემენტები განსხვავებულია, ამიტომ სიმრავლის დახასიათებისას მის შემადგენელ ელემენტებს არ ვიმეორებთ, ე.ი. თუ სიმრავლე შედგება რიცხვებისაგან 1, 2, და 3, ჩვენ შესაბამისი სიმრავლის ჩასაწერად გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნას $\{1,2,3\}$ და არა $\{1,2,3,2\}$ ან $\{1,2,3,3,3,3,3\}$ და ა.შ. ანალოგიურად, თუ ვიხილავთ აუდიტორიაში სტუდენტების სახელების სიმრავლეს, მაშინ შედეგად შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სიმრავლე {*ეთერი, ნიკოლოზი, პავლე, დავითი, მაია, თამარი, ეკატერინე, ლია, აკაკი*}, რომელიც შედგება 9 ელემენტისაგან, მაგრამ რეალურად აუდიტორიაში შეიძლება იყოს უფრო მეტი სტუდენტი, მაგალითად, 12 სტუდენტი. რაც იმას ნიშნავს, რომ ზოგიერთ სტუდენტებს აქვთ ერთი და იგივე სახელი, მაგრამ სტუდენტების სახელების სიმრავლის განხილვისას ჩვენ მათ ორჯერ

ან უფრო მეტჯერ არ ვიმეორებთ. აგრეთვე შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან სიმრავლე არის ობიექტთა ერთობლიობა, ამიტომ სიმრავლის ჩანაწერში ელემენტთა რიგს მნიშვნელობა არ აქვს. მაგალითად, $\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}$ წარმოადგენენ ერთი და იმავე სიმრავლეს.

სიმრავლეების აღსანიშნავად, როგორც წესი, იყენებენ დიდ ლათინურ ასოებს $A, B, C, \ldots,$ ხოლო მისი ელემენტებისათვის კი პატარა ლათინურ ასოებს $a, b, c, \ldots$. იმ ფაქტს, რომ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს ასე აღნიშნავენ $a \in A$, ხოლო თუ a ელემენტი არ არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ წერენ $a \notin A$. სიმრავლის დასახასიათებლად უნდა შეგვეძლოს ნებისმიერი ობიექტისათვის იმის დადგენა ეკუთვნის ის სიმრავლეს თუ არა. აქედან გამომდინარე, სიმრავლე შეიძლება განვსაზღვროთ მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით, რაც შესაძლებელია, მხოლოდ ელემენტების სასრული რაოდენობის შემთხვევაში, ან უნდა მივუთითოთ რაიმე თვისება, რომლის მიხედვით შევძლებთ იმის ცალსახად დადგენას ეკუთვნის თუ არა ობიექტი სიმრავლეს. თუ ამ თვისებას ავღნიშნავთ $\mathscr{P}$ ასოთი, ხოლო იმ ფაქტს, რომ a ობიექტს აქვს აღნიშნული თვისება $\mathscr{P}(a)$ სიმბოლოთი, მაშინ იმ ობიექტების A სიმრავლე, რომელთაც აქვთ $\mathscr{P}$ თვისება ასე ჩაიწერება $A = \{a \mid \mathscr{P}(a)\}$. მაგალითად, $x^2 - 4x + 3 = 0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება ასე გამოვსახოთ

$$A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1,3\}.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლე. A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ტოლი, თუ ისინი ერთი და იგივე ელემენტებისაგან შედგება და ამას ასე ჩაწერენ $A = B$.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს, მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ***ქვესიმრავლე***, რაც ასე ჩაიწერება $A \subseteq B$. თუ $A \subseteq B$ და $A \neq B$, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ***მკაცრი ქვესიმრავლე*** და წერენ $A \subset B$. ე.ი., თუ A არის B-ს მკაცრი ქვესიმრავლე, მაშინ A სიმრავლის ყველა ელემენტი ეკუთვნის

B სიმრავლეს, მაგრამ B სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენ-ტი, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. მაგალითად, თუ $A=\{a,b,c\}$ და $B=\{a,b,c,d\}$, მაშინ $A\subset B$, ვინაიდან B სიმ-რავლეს ეკუთვნის ელემენტი d, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. ცარიელი სიმრავლე არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე, ე.ი. $\varnothing\subseteq A$ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის. იმ ფაქტს, რომ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე ასე ჩაწერენ $A\not\subset B$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $A\subseteq B$ და $A\supseteq B$, მაშინ $A=B$. მართლაც, $A\subseteq B$ ნიშნავს, რომ A სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს და ამავე დროს $A\supseteq B$ ძალით B სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. აქედან გამომდინარე, A და B სიმრავლეები შედგება ერთი და იგივე ელემენტებისაგან ანუ A და B სიმრავლეები ტოლია. მაგალითად, $(x-1)^2=0$ განტოლების ფესვთა სიმრავლე ტოლია $\dfrac{x+1}{2}=1$ განტოლების ფესვთა სიმრავლის.

<u>**ამოცანა 1.1.**</u> ვთქვათ $A=\{1,3,5,a,b\}$, $B=\{b,a,3\}$, $C=\{1,7,a,8,b\}$. განსაზღვრეთ რომელი სიმრავლე რომელი სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

<u>**ამოხსნა.**</u> განვიხილოთ A, B და C სიმრავლეები. მათი ელემენ-ტების შედარებით ვღებულობთ, რომ B სიმრავლის ყველა ელე-მენტი ამავე დროს არის A სიმრავლის ელემენტიც, ე.ი., $B\subset A$. C სიმრავლე არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან C-ში არის ელემენტები 7, 8, რომლებიც არ ეკუთვნიან A-ს. ამავე დროს არც A სიმრავლე არ არის C სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან A-ს ელემენტები 3 და 5 არ ეკუთვნიან C. ანალოგიურად შეიძლება დავასკვნათ, რომ არც B სიმრავ-ლეა C სიმრავლის ქვესიმრავლე და არც C სიმრავლეა B სიმრავლის ქვესიმრავლე.