გია ავალიშვილი ♦ მარიამ ავალიშვილი

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

II

საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი – 2011

გ. ავალიშვილი, მ. ავალიშვილი, მათემატიკა ეკონოისტებისათვის, II ნაწილი, თბილისი, საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2011, 104 გვ.
ISBN 978-999-40-50-95-6

ᲨᲘᲜᲐᲐᲠᲡᲘ

I ᲗᲐᲕᲘ. ერთი ცვლადის ფუნქციების გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით

ᲗᲐᲕᲘ II. მრავალი ცვლადის ფუნქციები

ᲗᲐᲕᲘ III. განსაზღვრული და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ᲗᲐᲕᲘ IV. დიფერენციალური განტოლებები

I თავი

ერთი ცვლადის ფუნქციების გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით

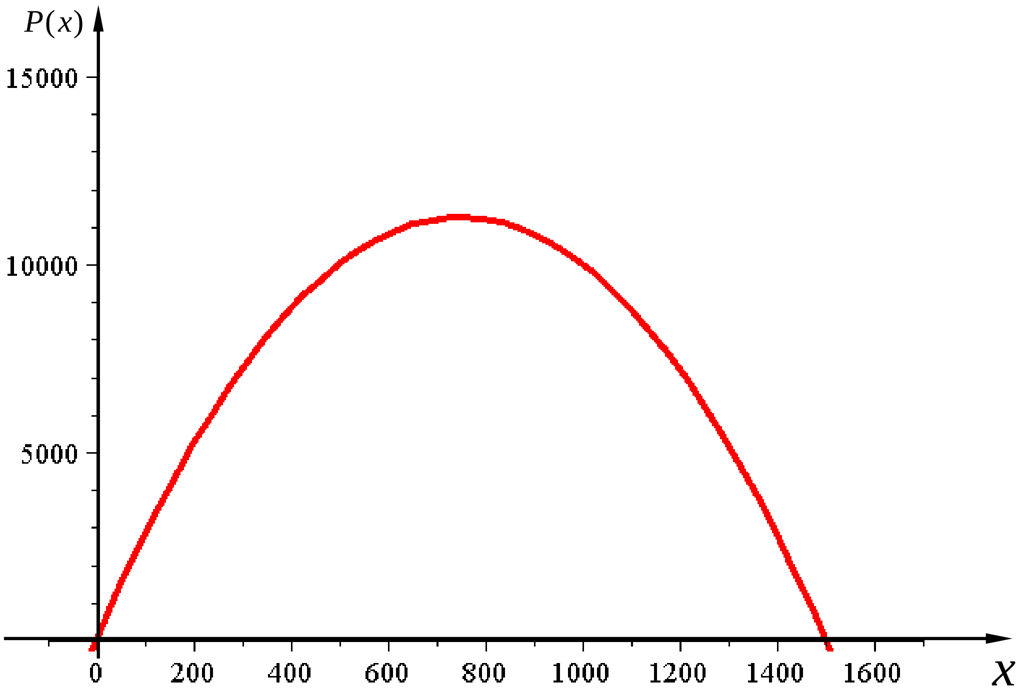
§ 1. ფუნქციის წარმოებული, მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

განვიხილოთ ფუნქციის ზღვრის ზოგიერთი გამოყენება, კერძოდ განვიხილოთ ახალი ცნება, რომელსაც წარმოებული ეწოდება. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

ამოცანა 1.1. (მოგების ანალიზი) ვთქვათ კომპანია აწარმოებს ყვავილების ქოთნებს, ყვავილების x ქოთნის გაყიდვისას მოგების ფუნქციას აქვს სახე

$$P(x)=30x-0{,}02x^2, \qquad 0\le x\le 1500,$$

რომლის გრაფიკიც გამოსახულია ნახაზზე



ა) როგორი იქნება მოგების ცვლილება თუ 100 ქოთნის ნაცვლად გავყიდით 500 ქოთანს?

ბ) რა იქნება მოგების საშუალო ცვლილება პროდუქციის რაოდენობის ასეთი ცვლილებისას?

ამოხსნა. ა) როგორც ჩვენთვის ცნობილია მოგების ცვლილება, ანუ რამდენით მოიმატებს მოგება 100 ქოთნის ნაცვლად 500 ქოთნის გაყიდვის შემთხვევაში, გამოითვლება შემდეგნაირად

$$P(500)-P(100)=30\cdot 500-0{,}02\cdot(500)^2-[30\cdot 100-0{,}02\cdot(100)^2]=10000-2800=7200\$$$

მაშასადამე პროდუქციის რაოდენობის 100-დან 500 ქოთნამდე გაზრდით მოგება იზრდება 7200$-ით.

ბ) იმისათვის რომ ვიპოვოთ მოგების საშუალო ცვლილება მოგების ცვლილება უნდა გავყოთ პროდუქციის ცვლილებაზე, ე.ი. გვექნება

$$\frac{P(500)-P(100)}{500-100}=\frac{7200}{400}=18\$$$

მაშასადამე მივიღებთ, რომ მოგების საშუალო ცვლილება 18$-ის ტოლია.

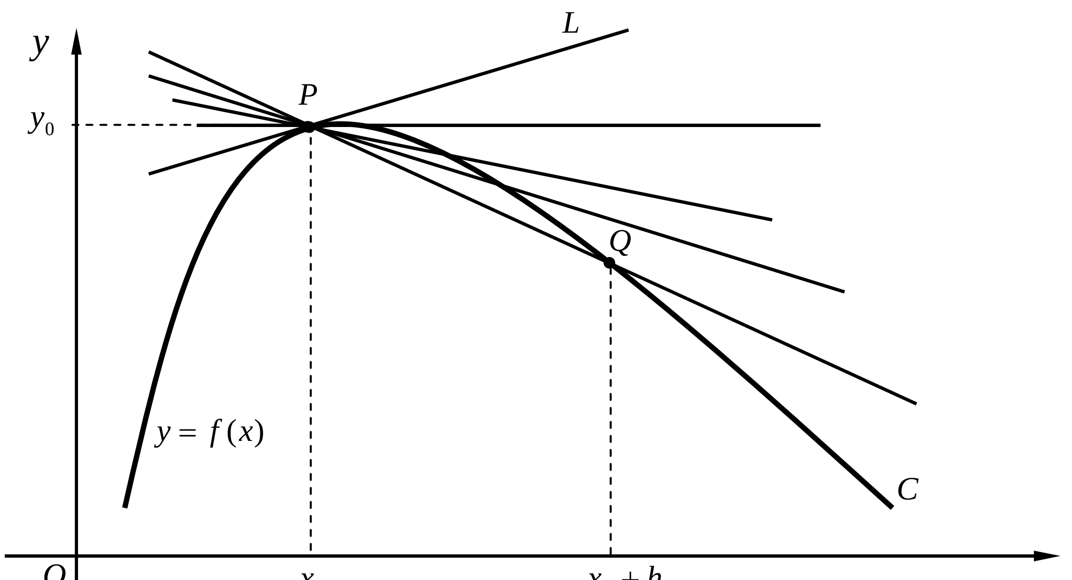
ვთქვათ მოცემული გვაქვს $y = f(x)$ ფუნქცია, მაშინ ამ ფუნქციის **საშუალო ცვლილება** $x = a$ წერტილიდან $x = a + h$ წერტილამდე ტოლია

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad \text{როცა} \quad h \neq 0 .$$

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ფუნქციის საშუალო ცვლილების **რიცხვითი ინტერპრეტაცია**, ახლა კი განვიხილოთ მისი **გეომეტრიული ინტერპრეტაცია**. ვთქვათ $y = f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, რომლის გრაფიკია C. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ წრფეს მკვეთი ეწოდება. თუ ფუნქციის გრაფიკის მკვეთი გადის $(x_0, f(x_0))$ და $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ წერტილებზე, მაშინ შესაბამისად მისი კუთხური კოეფიციენტი ტოლი იქნება ფუნქციის საშუალო ცვლილების ე.ი.

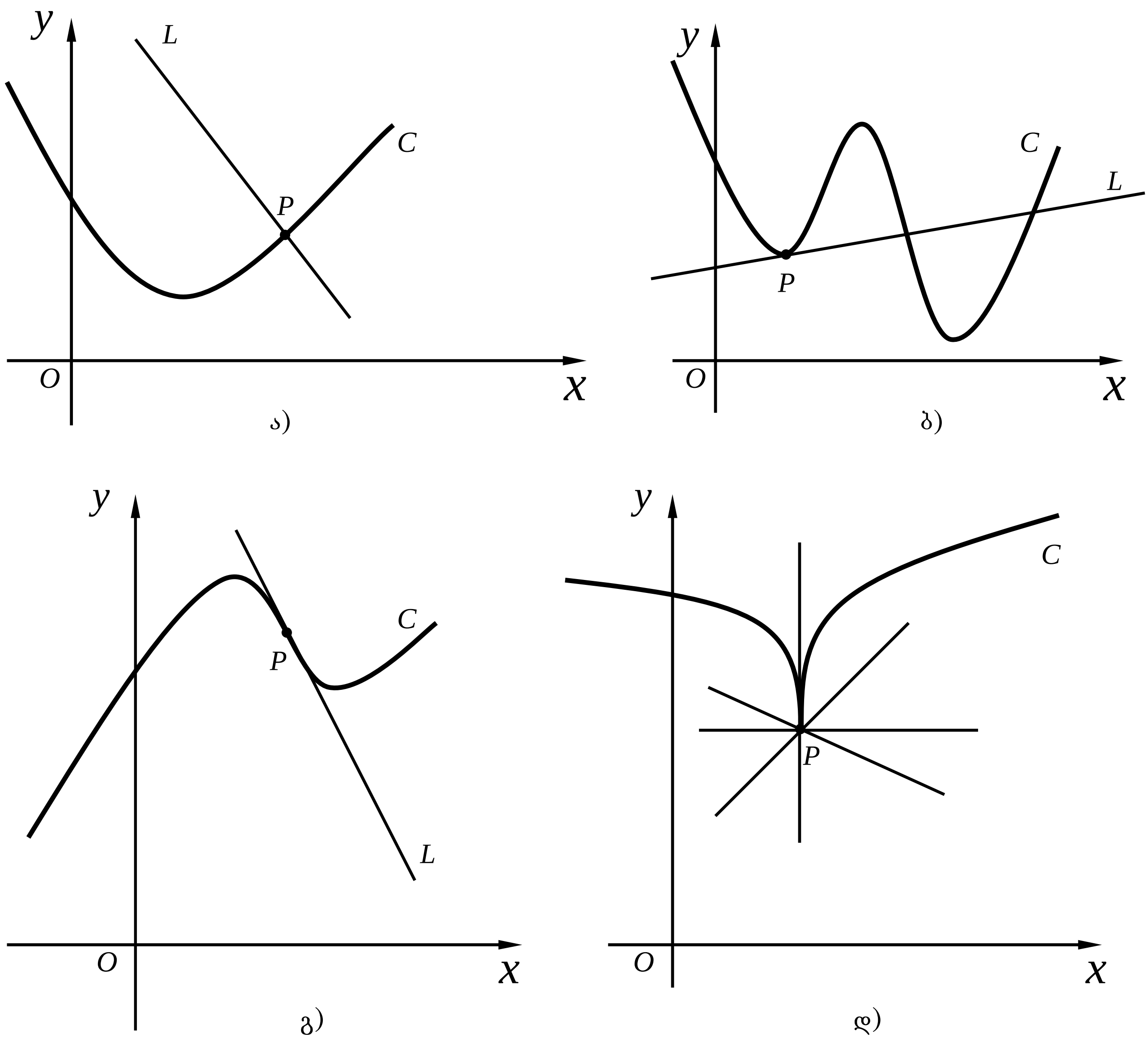
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის P წერტილი (x_0, y_0), სადაც $y_0 = f(x_0)$. ვიგულისხმოთ, რომ P წერტილი არ წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის კიდურა წერტილს. განვიხილოთ წრფე, რომელიც წარმოადგენს $y = f(x)$ **ფუნქციის გრაფიკის მხებს** P წერტილში. განვმარტოთ თუ რას ვგულისხმობთ ამ ტერმინის ქვეშ. თუ Q არის $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი, რომელიც განსხვავებულია P-გან და L არის წრფე, რომელიც გადის P-ზე, რომლის კუთხური კოეფიციენტი უდრის PQ მკვეთის კუთხური კოეფიციენტის ზღვარს, როცა Q მიისწრაფის P-კენ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გასწვრივ, მაშინ მას ეწოდება $y = f(x)$ **ფუნქციის გრაფიკის მხები** P წერტილში (ნახ. 1.1)



ნახ. 1.1

შევნიშნოთ, რომ ნახ. 1.2-ზე გამოსახული შემთხვევებიდან L წრფე წარმოადგენს $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხებს მხოლოდ ბ) და გ) შემთხვევებში, თუმცა თითოეულ შემთხვევაში L წრფე მხოლოდ ერთ წერტილში კვეთს $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს.



ნახ. 1.2

ვინაიდან C წარმოადგენს $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ამიტომ ყოველი ვერტიკალური წრფე აღნიშნულ გრაფიკს გადაკვეთს ერთ წერტილში. ვთქვათ P წერტილის კოორდინატებია $(x_0, f(x_0))$, ხოლო $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ წერტილი განსხვავებულია P-გან, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ PQ-ს საკუთხო კოეფიციენტი იქნება

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

აღნიშნულ გამოსახულებაში h შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ასევე უარყო-ფითი, იმის მიხედვით Q წერტილი არის P წერტილის მარჯვნივ თუ მარცხნივ. თუ f ფუნქცია უწყვეტია $x = x_0$ წერტილში და არსებობს

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m,$$

მაშინ წრფეს რომლის კუთხური კოეფიციენტი m-ის ტოლია და გადის $P = (x_0, f(x_0))$ წერტილზე ეწოდება $y = f(x)$ ფუნქციის **მხები წრფე** (ან უბრალოდ **მხები**) P წერტილში. მაშასადამე მხების განტოლებას აქვს სახე

$$y = m(x - x_0) + y_0 \tag{1.1}$$

მაშასადამე, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხების კუთხური კოეფიციენტი.

ამოცანა 1.2. იპოვეთ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მხების განტოლება (1;1) წერტილში.

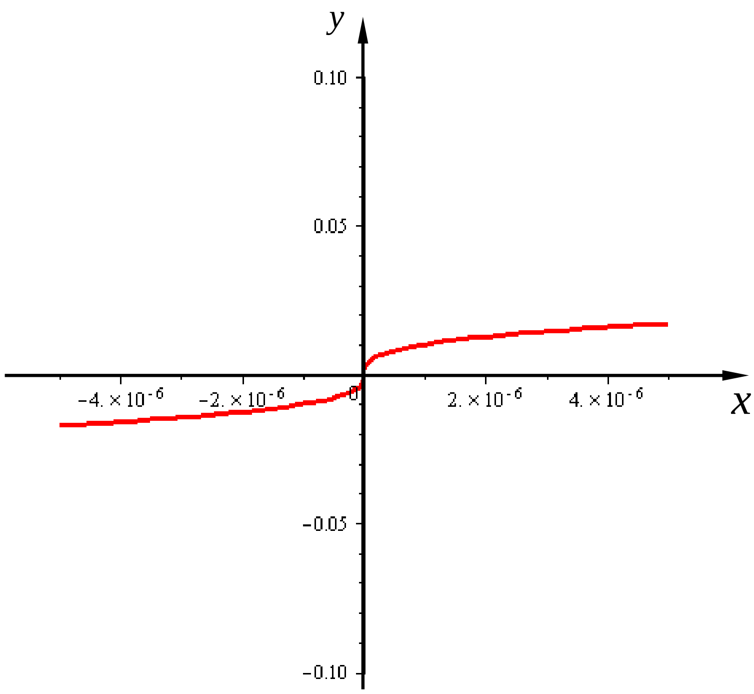
ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში $f(x)=x^2$, $x_0=1$ და $f(x_0)=f(1)=1$. მაშასადამე კუთხური კოეფიციენტი ტოლი იქნება

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2.$$

მაშასადამე მხების განტოლებას (1,1) წერტილში ზემოთ მოყვანილი (1.1) ფორმულის თანახმად ექნება სახე

$$y=2(x-1)+1 \text{ ან } y=2x-1.$$

განვიხილოთ $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკიც გამოსახულია ნახ. 1.3-ზე



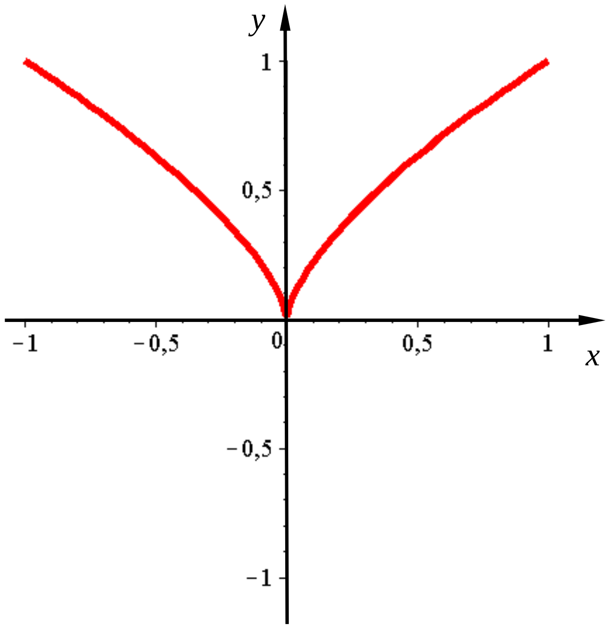
ნახ. 1.3

აღნიშნული გრაფიკი არის გლუვი წირი და ჩანს, რომ Oy ღერძი წარმოადგენს აღნიშნული წირის მხებს კოორდინატთა სათავეში დავასაბუთოთ აღნიშნული მკაცრად. განვიხილოთ ზღვარი

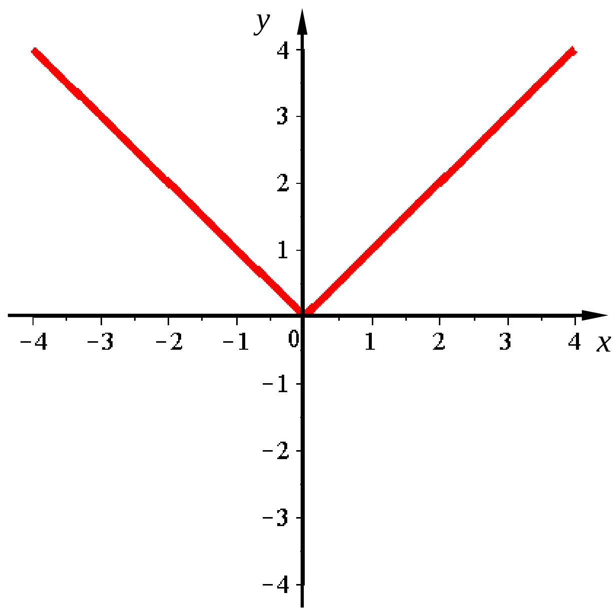
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\infty.$$

აღნიშნული ზღვარი არ არსებობს, ე.ი. კოორდინატთა სათავის და წირის სხვა Q წერტილის შემაერთებელი მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, როცა წირის Q წერტილი მიისწრაფის კოორდინატთა სათავისაკენ, ე.ი. მხები არის (0,0) წერტილზე გამავალი ვერტიკალური წრფე, ე.ი. Oy ღერძი.

ახლა განვიხილოთ $f(x)=x^{2/3}$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკიც ნაჩვენებია ნახ. 1.4-ზე



ნახ. 1.4



ნახ. 1.5

აღნიშნულ ფუნქციას არ გააჩნია მხები კოორდინატთა სათავეში, მართლაც განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^{2/3}}{h}=\frac{1}{h^{1/3}},$$

რომელსაც არ გააჩნია ზღვარი, როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ (მარჯვენა ზღვარი არის $+\infty$, ხოლო მარცხენა კი $-\infty$). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წირს აქვს **წამახვილება** კოორდინატთა სათავეში.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ **ვერტიკალური მხები** შემდეგნაირად: თუ f არის უწყვეტი ფუნქცია $P=(x_0,y_0)$ წერტილში, სადაც $y_0=f(x_0)$ და

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty \quad \text{ან} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty,$$

მაშინ ვერტიკალური წრფე $x=x_0$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის მხები P წერტილში. ხოლო ყველა სხვა შემთხვევაში თუ აღნიშნული შეფარდების ზღვარი არ არსებობს, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია მხები P წერტილში.

<u>ამოცანა 1.3.</u> გაარკვიეთ აქვს თუ არა $y=|x|$ ფუნქციას მხები $x=0$ წერტილში

<u>**ამოხსნა.**</u> ამ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ ნებისმიერ $h\neq 0$, მაშინ გვექნება

$$\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}=\operatorname{sgn}h=\begin{cases}1, & \text{როცა } h>0\\ -1, & \text{როცა } h<0\end{cases}$$

ვინაიდან $\operatorname{sgn}h$-ს აქვს განსხვავებული მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები 0 წერტილში (კერძოდ 1 და -1), ამიტომ აღნიშნულ ფარდობას არ გააჩნია ზღვარი, როცა $h\to 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $y=|x|$ ფუნქციას არ გააჩნია მხები (0;0) წერტილში. (ნახ. 1.5)

განვიხილოთ $y=f(x)$ ფუნქცია, თუ არსებობს

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ე.ი. აღნიშნული ზღვარი სასრული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მას ეწოდება f ფუნქციის **წარმოებული** x_0 წერტილში და აღინიშნება $f^{/}(x_0)$ ან $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, ხოლო f ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი** x_0 წერტილში. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ზღვარი წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის **მყისიერ ცვლილებას** $x=x_0$ წერტილში.

მაშასადამე განმარტების ძალით $f^{/}$-ის განსაზღვრის არე არის f-ის განსაზღვრის არის ის x წერტილები, რომლებშიც f ფუნქციის გრაფიკს აქვს არავერტიკალური მხებები და $f^{/}$-ის მნიშვნელობა ასეთ წერტილებზე ემთხვევა $y=f(x)$ ფუნქციის მხები წრფის კუთხურ კოეფიციენტს.

აღნიშნულ განმარტებაზე დაყრდნობით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

<u>ამოცანა 1.4.</u> იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, თუ

ა) $f(x)=ax+b$ გ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

ბ) $f(x)=x^2$ დ) $f(x)=\sqrt{x}$

<u>ამოხსნა.</u> გამოვიყენოთ წარმოებულის განმარტება, მაშინ მივიღებთ, რომ

ა) $f^{/}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah}{h}=\lim\limits_{h\to 0}a=a$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ე.ი. თუ $f(x)=a$, მაშინ $f^{/}(x)=0$.

ბ) $$f^{/}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2x\cdot h+h^2-x^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x\cdot h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

გ) $$f^{/}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}.$$

დ) $$f^{/}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ფუნქცია არ არის წარმოებადი $x=0$ წერტილში.

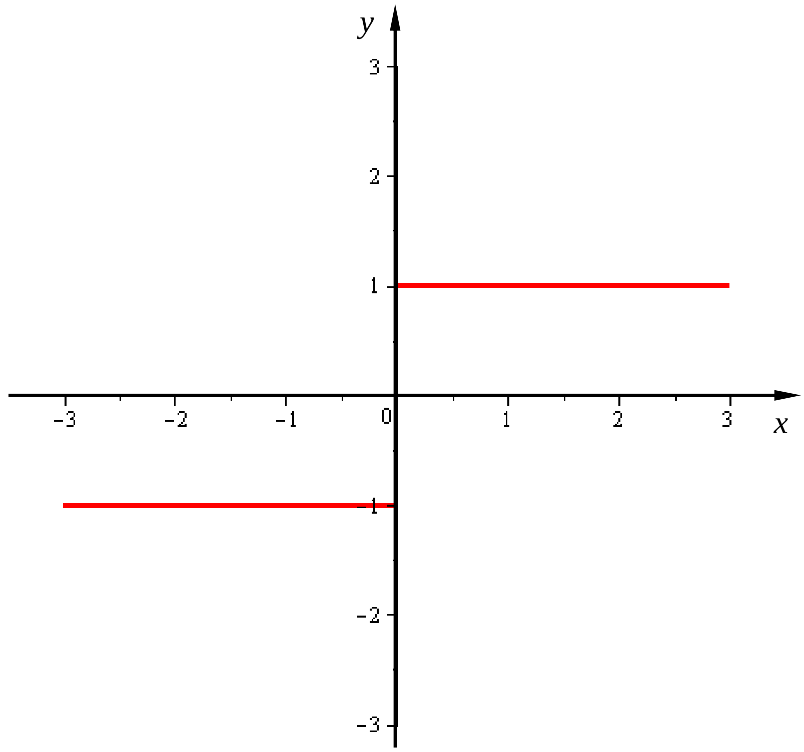
<u>ამოცანა 1.5.</u> ვაჩვენოთ, რომ თუ $f(x)=|x|$, მაშინ $f^{/}(x)=\dfrac{x}{|x|}=\operatorname{sgn}x$, როცა $x\neq 0$.

<u>ამოხსნა.</u> მაშასადამე ჩვენ გვაქვს

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{როცა } x\geq 0\\ -x, & \text{როცა } x<0\end{cases}$$

როგორც ზემოთ განხილული ამოცანა 1.4-დან ჩანს $f^{/}(x)=1$, როცა $x>0$ და $f^{/}(x)=-1$, როცა $x<0$. აგრეთვე ამოცანა 1.3-დან გამომდინარეობს, რომ f არ არის დიფერენცირებადი $x=0$ წერტილში. მაშასადამე მივიღეთ, რომ (ნახ. 1.6)

$$f^{/}(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x>0\\ -1, & \text{როცა } x<0\end{cases}$$



ნახ. 1.6

განვიხილოთ ფუნქციის წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

ამოცანა 1.6. კომპანიის სრული გაყიდვების მოცულობა t თვის განმავლობაში გამოითვლება შემდეგნაირად $S(t)=\sqrt{t}+2$. იპოვეთ $S(25)$ და $S^{/}(25)$ და გაანალიზეთ მათი მნიშვნელობები. გამოიყენეთ ეს მონაცემები გაყიდვების სრული მოცულობის შესაფასებლად 26 და 27 თვის შემდეგ.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ $S(25)=\sqrt{25}+2=7$, აგრეთვე ამოცანა 1.4-ის გამოყენებით, მივიღებთ, რომ $S^{/}(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, ე.ი. $S^{/}(25)=\dfrac{1}{2\sqrt{25}}=0{,}1$, რაც აგრეთვე წარმოადგენს გაყიდვების სრული მოცულობის მყისიერ ცვლილებას 25 თვის შემდეგ. მაშასადამე 25 თვის შემდეგ გაყიდვების სრული მოცულობა შეადგენს 7 მილიონ დოლარს და იზრდება $0{,}1$ მილიონით (100000) ყოველთვიურად. თუ ეს გაზრდის სიჩქარე დარჩება მუდმივი, მაშინ გაყიდვების სრული მოცულობა გაიზრდება $7{,}2$ მილიონ დოლარამდე 27 თვის შემდეგ და ა. შ. მიუხედავად იმისა, რომ $S^{/}(t)$ არ არის მუდმივი ფუნქცია ამ შემთხვევაში, ეს მნიშვნელობები უზრუნველყოფენ გაყიდევების სრული მოცულობის სასარგებლო შეფასებებს.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია $f(x)=5-x^2$, იპოვეთ

ა) $\dfrac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}$

ბ) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

გ) $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

დ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$