მარიამ ავალიშვილი ♦ გია ავალიშვილი

რაოდენობრივი კვლევის მეთოდები

საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი – 2011

I თავი

სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ელემენტები

§ 1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე

სიმრავლე წარმოადგენს განსხვავებულ ობიექტთა ერთობლიობას, რომელიც შედგენილია გარკვეული წესის მიხედვით. ნებისმიერი ობიექტისათვის შესაძლებელია იმის დადგენა არის თუ არა ის ამ სიმრავლის ელემენტი.

სიმრავლის შემადგენელ ობიექტებს ***სიმრავლის ელემენტები*** ეწოდება. თუ სიმრავლეს ელემენტები არ გააჩნია, მაშინ მას ***ცარიელი სიმრავლე*** ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მაგალითად, შეგვიძლია განვიხილოთ უნივერსიტეტის სტუდენტთა სიმრავლე, რომლის ელემენტებს წარმოადგენენ უნივერსიტეტის სტუდენტები, ან ბიბლიოთეკის მიერ უკანასკნელი ერთი თვის განმავლობაში შეძენილი წიგნების სიმრავლე, რომლის ელემენტები იქნება წიგნები და სხვა.

ვინაიდან სიმრავლის ელემენტები განსხვავებულია, ამიტომ სიმრავლის დახასიათებისას მის შემადგენელ ელემენტებს არ ვიმეორებთ, ე.ი. თუ სიმრავლე შედგება რიცხვებისაგან 1, 2, და 3, ჩვენ შესაბამისი სიმრავლის ჩასაწერად გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნას $\{1,2,3\}$ და არა $\{1,2,3,2\}$ ან $\{1,2,3,3,3,3,3\}$ და ა.შ. ანალოგიურად, თუ ვიხილავთ აუდიტორიაში სტუდენტების სახელების სიმრავლეს, მაშინ შედეგად შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სიმრავლე {*ეთერი, ნიკოლოზი, პავლე, დავითი, მაია, თამარი, ეკატერინე, ლია, აკაკი*}, რომელიც შედგება 9 ელემენტისაგან, მაგრამ რეალურად აუდიტორიაში შეიძლება იყოს უფრო მეტი სტუდენტი, მაგალითად, 12 სტუდენტი. რაც იმას ნიშნავს, რომ ზოგიერთ სტუდენტებს აქვთ ერთი და იგივე სახელი, მაგრამ სტუდენტების სახელების სიმრავლის განხილვისას ჩვენ მათ ორჯერ ან უფრო მეტჯერ არ ვიმეორებთ. აგრეთვე შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან სიმრავლე არის ობიექტთა ერთობლიობა, ამიტომ სიმრავლის ჩანაწერში ელემენტთა რიგს მნიშვნელობა არ აქვს. მაგალითად, $\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\}$ წარმოადგენენ ერთი და იმავე სიმრავლეს.

სიმრავლეების აღსანიშნავად, როგორც წესი, იყენებენ დიდ ლათინურ ასოებს $A,B,C,....,$ ხოლო მისი ელემენტებისათვის კი პატარა ლათინურ ასოებს $a,b,c,...$. იმ ფაქტს, რომ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს ასე აღნიშნავენ $a\in A,$ ხოლო თუ a ელემენტი არ არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ წერენ $a\notin A.$ სიმრავლის დასახასიათებლად უნდა შეგვეძლოს ნებისმიერი ობიექტისათვის იმის დადგენა ეკუთვნის ის სიმრავლეს თუ არა. აქედან გამომდინარე, სიმრავლე შეიძლება განვსაზღვროთ მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით, რაც შესაძლებელია, მხოლოდ ელემენტების სასრული რაოდენობის შემთხვევაში, ან უნდა მივუთითოთ რაიმე თვისება, რომლის მიხედვით შევძლებთ იმის ცალსახად დადგენას ეკუთვნის თუ არა ობიექტი სიმრავლეს. თუ ამ თვისებას ავღნიშნავთ $\mathscr{P}$ ასოთი, ხოლო იმ ფაქტს, რომ a ობიექტს აქვს აღნიშნული თვისება $\mathscr{P}(a)$ სიმბოლოთი, მაშინ იმ ობიექტების A სიმრავლე, რომელთაც აქვთ $\mathscr{P}$ თვისება ასე ჩაიწერება $A=\{a\,|\,\mathscr{P}(a)\}$. მაგალითად, $x^2-4x+3=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება ასე გამოვსახოთ

$$A=\{x\,|\,x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლე. A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ტოლი, თუ ისინი ერთი და იგივე ელემენტებისაგან შედგება და ამას ასე ჩაწერენ $A=B$.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს, მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ***ქვესიმრავლე***, რაც ასე ჩაიწერება $A\subseteq B.$ თუ $A\subseteq B$ და $A\neq B,$ მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ***მკაცრი ქვესიმრავლე*** და წერენ $A\subset B.$ ე.ი., თუ A არის B-ს მკაცრი ქვესიმრავლე, მაშინ A სიმრავლის ყველა ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს, მაგრამ B სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი, რომე-

შინაარსი

მ. ავალიშვილი, გ. ავალიშვილი, რაოდენობრივი კვლევის მეთოდები.
თბილისი, საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2011, 94 გვ.
ISBN 978-999-40-50-94-9

ლიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. მაგალითად, თუ $A=\{a,b,c\}$ და $B=\{a,b,c,d\}$, მაშინ $A\subset B$, ვინაიდან B სიმრავლეს ეკუთვნის ელემენტი d, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. ცარიელი სიმრავლე არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე, ე.ი. $\varnothing\subseteq A$ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის. იმ ფაქტს, რომ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე ასე ჩაწერენ $A\not\subset B$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $A\subseteq B$ და $A\supseteq B$, მაშინ $A=B$. მართლაც, $A\subseteq B$ ნიშნავს, რომ A სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის B-ს და ამავე დროს $A\supseteq B$ ძალით B სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. აქედან გამომდინარე, A და B სიმრავლეები შედგება ერთი და იგივე ელემენტებისაგან ანუ A და B სიმრავლეები ტოლია. მაგალითად, $(x-1)^2=0$ განტოლების ფესვთა სიმრავლე ტოლია $\frac{x+1}{2}=1$ განტოლების ფესვთა სიმრავლის.

<u>ამოცანა 1.1.</u> ვთქვათ $A=\{1,3,5,a,b\}$, $B=\{b,a,3\}$, $C=\{1,7,a,8,b\}$. განსაზღვრეთ რომელი სიმრავლე რომელი სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

<u>ამოხსნა.</u> განვიხილოთ A, B და C სიმრავლეები. მათი ელემენტების შედარებით ვღებულობთ, რომ B სიმრავლის ყველა ელემენტი ამავე დროს არის A სიმრავლის ელემენტიც, ე.ი., $B\subset A$. C სიმრავლე არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან C-ში არის ელემენტები 7, 8, რომლებიც არ ეკუთვნიან A-ს. ამავე დროს არც A სიმრავლე არ არის C სიმრავლის ქვესიმრავლე, რადგან A-ს ელემენტები 3 და 5 არ ეკუთვნიან C. ანალოგიურად შეიძლება დავასკვნათ, რომ არც B სიმრავლეა C სიმრავლის ქვესიმრავლე და არც C სიმრავლეა B სიმრავლის ქვესიმრავლე.

განვიხილოთ რამოდენიმე ძირითადი ოპერაცია სიმრავლეებზე: თანაკვეთა, გაერთიანება, სხვაობა, დამატება და ნამრავლი.

A და B სიმრავლეების ***თანაკვეთა*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა იმ ელემენტისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც A სიმრავლეს, ასევე B სიმრავლეს და აღინიშნება $A\cap B$ სიმბოლოთი. ე.ი. $A\cap B=\{a\,|\,a\in A$ და $a\in B\}$.

A და B სიმრავლეების ***გაერთიანება*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა იმ ელემენტისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან ან A სიმრავლეს ან B სიმრავლეს და აღინიშნება $A\cup B$ სიმბოლოთი, ე.ი. $A\cup B=\{a\,|\,a\in A$ ან $a\in B\}$.

სიმრავლეთა გაერთიანების და თანაკვეთის ნიშნები შემოტანილი იყო იტალიელი მათემატიკოსის ჯუზეპე პეანოს (1858-1932) მიერ, ხოლო ჩართვის ნიშანი $\subset$ კი შემოტანილი იყო ე. შრედერის (1841-1902) მიერ.

<u>ამოცანა 1.2.</u> ვთქვათ $A=\{1,3,5,8\}$, $B=\{3,5,7\}$ და $C=\{2,4,6,8\}$. იპოვეთ $A\cap B$, $A\cup B$ და $B\cap(A\cup C)$.

<u>ამოხსნა.</u> თანაკვეთის და გაერთიანების ოპერაციების განმარტების გამოყენებით მივიღებთ, რომ $A\cap B=\{1,3,5,8\}\cap\{3,5,7\}=\{3,5\}$, $A\cup B=\{1,3,5,8\}\cup\{3,5,7\}=\{1,3,5,7,8\}$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $B\cap(A\cup C)$, ჯერ უნდა ვიპოვოთ $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6,8\}$ და შემდეგ განვსაზღვროთ $B\cap(A\cup C)=\{3,5\}$.

A და B სიმრავლეების ***სხვაობა*** აღინიშნება $A\setminus B$ სიმბოლოთი და წარმოადგენს ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნიან A სიმრავლეს და არ ეკუთვნიან B სიმრავლეს. ე.ი. $A\setminus B=\{a\,|\,a\in A$ და $a\notin B\}$.

<u>ამოცანა 1.3.</u> ვთქვათ $A=\{3,5,a,b\}$ და $B=\{3,c,d,7\}$. განსაზღვრეთ $A\setminus B$ და $B\setminus A$.

<u>ამოხსნა.</u> იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $A\setminus B$ უნდა ამოვწეროთ A სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნიან B სიმრავლეს. ეს ელემენტებია $5,a,b$. აქედან გამომდინარე, $A\setminus B=\{5,a,b\}$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $B\setminus A=\{c,d,7\}$.

ნულ ელემენტიანი ქვესიმრავლე	ერთ ელემენტიანი ქვესიმრავლეები	ორ ელემენტიანი ქვესიმრავლეები	სამ ელემენტიანი ქვესიმრავლე
$\varnothing$	$\{a\},\{b\},\{c\}$	$\{a,b\},\{b,c\},$ $\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$

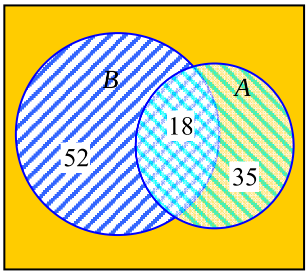
როგორც ვხედავთ სამ ელემენტიან A სიმრავლეს გააჩნია $8=2^3$ ქვესიმრავლე. აღნიშნული კანონზომიერება შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი სასრული სიმრავლისათვის. სახელდობრ, თუ A სიმრავლე შედგება n-ელემენტისაგან, მაშინ მას გააჩნია 2^n ქვესიმრავლე. მაგალითად, ხუთ ელემენტიან სიმრავლეს $A=\{a,b,c,d,e\}$ გააჩნია $2^5=32$ ქვესიმრავლე.

ამოცანა 1.5. 100 სტუდენტის გამოკითხვის შედეგად დადგინდა, რომ 35 სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკის საგანი, 52 სტუდენტმა საოფისე კომპიუტერული პროგრამები, ხოლო 18 სტუდენტმა კი აირჩია ორივე საგანი.

ა) რამდენმა სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკის ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამების საგანი?

ბ) რამდენ სტუდენტს არ აურჩევია არც ერთი საგანი?

ამოხსნა. A-თი აღვნიშნოთ იმ სტუდენტთა სიმრავლე, რომლებმაც აირჩიეს უმაღლესი მათემატიკის საგანი, ხოლო B-თი კი იმ სტუდენტთა სიმრავლე, რომლებმაც აირჩიეს საოფისე კომპიუტერული პროგრამები, მაშინ $n(A)=35$, $n(B)=52$, $n(A\cap B)=18$. გამოვიყენოთ ვენის დიაგრამა ამ ამოცანის ამოსახსნელად (ნახ. 1.6).



ნახ. 1.6

ა) ვინაიდან $n(A\cap B)=18$, ამიტომ A და B სიმრავლეების საერთო ნაწილში იქნება 18 ელემენტი, ხოლო წრის დანარჩენ ნაწილში, რომელიც გამოსახავს A-ს იქნება 35-18=17 ელემენტი. ანალოგიურად, B სიმრავლის თანაკვეთის გარეთ დარჩენილ ნაწილში იქნება 52-18=34 ელემენტი. აქედან დავასკვნით, რომ უმაღლესი მათემატიკა ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამები აურჩევია 17+18+34=69 სტუდენტს.

ბ) ვინაიდან სულ იყო 100 სტუდენტი, რომელთა შორის 69 სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკა ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამები, ამიტომ 100-69=31 სტუდენტს არ აურჩევია არც ერთი საგანი.

შევნიშნოთ, რომ ამოცანა 1.5-ის ამოხსნაში მოყვანილი მსჯელობა წარმოადგენს ორი სასრული სიმრავლისათვის ზოგადი კანონზომიერების კერძო შემთხვევას. მართლაც, განვიხილოთ ორი სასრული A და B სიმრავლე. თუ დავითვლით A და B სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობებს და შევკრებთ მიღებულ სიდიდეებს, მაშინ ის ელემენტები, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც A-ს ასევე B-ს, ე.ი. ეკუთვნიან $A\cap B$-ს, ჩათვლილი აღმოჩნდება ორჯერ. აქედან გამომდინარე, იმისათვის, რომ დავითვალოთ იმ ელემენტთა რაოდენობა რომლებიც ეკუთვნიან ან A სიმრავლეს ან B სიმრავლეს, ანუ დავითვალოთ $n(A\cup B)$, ჩვენ $n(A)+n(B)$-ს უნდა გამოვაკლოთ $A\cap B$-ში არსებული ელემენტების რაოდენობა. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ შემდეგი თეორემა:

3. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$;
4. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$;
5. $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$;
6. $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$;
7. $A\cup A = A$;
8. $A\cap A = A$;
9. $A\setminus B = A$ სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A\cap B=\varnothing$;
10. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;
11. $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

სიმრავლეებზე გაერთიანების, თანაკვეთის, სხვაობის და დამატების ოპერაციებთან ერთად ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ოპერაციას წარმოადგენს სიმრავლეთა პირდაპირი ანუ დეკარტული ნამრავლი. აღნიშნული ოპერაცია გამოიყენება სხვადასხვა რეალური ობიექტებისაგან შემდგარი სიმრავლეების აღწერისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ რამოდენიმე მახასიათებელი.

A და B სიმრავლეების ***პირდაპირი ანუ დეკარტული ნამრავლი*** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება დალაგებული (a,b) წყვილებისაგან, სადაც წყვილის პირველი ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, ხოლო მეორე კი B სიმრავლეს, ე.ი. $a\in A$, $b\in B$ და წყვილში ელემენტების მიმდევრობას აქვს მნიშვნელობა ანუ თუ $a\neq b$, მაშინ $(a,b)\neq(b,a)$. სიმრავლეთა პირდაპირი ნამრავლი აღინიშნება $A\times B$ სიმბოლოთი და მისი განმარტების თანახმად $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A$ და $b\in B\}$. ანალოგიურად განიმარტება სამი და უფრო მეტი სიმრავლის პირდაპირი ნამრავლი. სახელდობრ, A_1, A_2, A_3, ..., A_n სიმრავლეების პირდაპირი ნამრავლი $A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n$ წარმოადგენს დალაგებული $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ n-ეულების სიმრავლეს, სადაც პირველი ელემენტი ეკუთვნის A_1, მეორე ეკუთვნის A_2, და ა.შ. უკანასკნელი ელემენტი ეკუთვნის A_n, ე.ი. $A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times\ \times A_n=\{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)\mid a_1\in A_1$ და $a_2\in A_2$, ... , $a_n\in A_n\}$. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $\varnothing\times A = A\times\varnothing=\varnothing$.

სიმრავლეთა პირდაპირი ნამრავლი გამოიყენება ისეთი ობიექტების აღწერისას, რომელთათვისაც ჩვენ გვაინტერესებს ერთდროულად რამოდენიმე მახასიათებლის ცოდნა. მაგალითად, გვინდა აღვწეროთ მაღაზიაში გასაყიდად გამოტანილი მაისურების სიმრავლე. ვთქვათ მაისურების შესახებ გვაინტერესებს მხოლოდ მათი ფერი და ზომა. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ მაღაზიაში წარმოდგენილია შავი, ლურჯი და მწვანე მაისურები, რომელთა ზომებია M, L და XL. მოყვანილ შემთხვევაში ყველა მაისურების სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ფერების სიმრავლის {შავი, ლურჯი, მწვანე} და ზომების სიმრავლის {M,L,XL} პირდაპირი ნამრავლის სახით: {(შავი, M), (ლურჯი, M), (მწვანე, M), (შავი, L), (ლურჯი, L), (მწვანე, L), (შავი, XL), (ლურჯი, XL), (მწვანე, XL)}. როგორც წესი რეალურ ობიექტებს ახასიათებს მრავალი თვისება, ამიტომ მათი აღწერისას ხშირად აუცილებელია რამდენიმე სიმრავლის პირდაპირი ნამრავლის განხილვა.

სიმრავლეთა პირდაპირი ანუ დეკარტული ნამრავლის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტული ნამრავლი ანუ $\mathbf{R}^2$. აღნიშნული სიმრავლის საშუალებით შეიძლება აღვწეროთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელზეც შემოღებულია დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა.

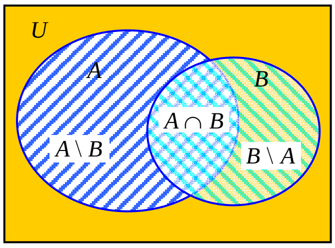
თუ A სიმრავლე შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას, მაშინ მას ***სასრული*** სიმრავლე ეწოდება და მისი ელემენტების რაოდენობა $n(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად, თუ $A=\{1,2,\ldots,25\}$, მაშინ $n(A)=25$. ვინაიდან ცარიელ სიმრავლეს ელემენტები არ გააჩნია ამიტომ $n(\varnothing)=0$. განვიხილოთ სამი ელემენტისაგან შემდგარი სიმრავლე $A=\{a,b,c\}$. ამოვწეროთ $A=\{a,b,c\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე:

უნივერსალური სიმრავლე ეწოდება ყველა შესასწავლ ობიექტთა სიმრავლეს. მას U სიმბოლოთი ავღნიშნავთ. უნივერსალური სიმრავლის და სხვაობის ოპერაციის გამოყენებით განისაზღვრება სიმრავლის დამატება, რომელიც შედგება კონკრეტული ამოცანის შესაბამის სიმრავლეში არ მოხვედრილი ელემენტებისაგან. A სიმრავლის ***დამატება*** ეწოდება U უნივერსალური სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც არ ეკუთვნიან A სიმრავლეს და აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი. ე.ი. $\overline{A}=\{x \mid x\in U \text{ და } x\notin A\}$. შევნიშნოთ, რომ $A\cup\overline{A}=U$ და $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

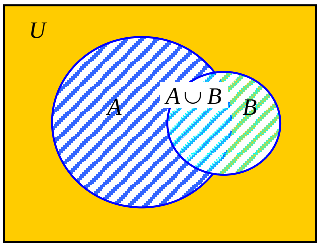
<u>ამოცანა 1.4.</u> ვთქვათ უნივერსალური სიმრავლეა $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ხოლო A სიმრავლე კი მოცემულია შემდეგი სახით $A=\{1,3,5,7,9\}$. იპოვეთ A სიმრავლის დამატება.

<u>ამოხსნა.</u> განმარტების თანახმად უნდა ამოვიწეროთ U უნივერსალური სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნიან A სიმრავლეს, ეს ელემენტებია $2,4,6,8$. აქედან გამომდინარე, A სიმრავლის დამატებაა $\overline{A}=\{2,4,6,8\}$.

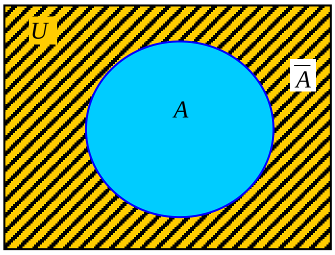
სხვადასხვა ობიექტებისაგან შემდგარი სიმრავლეების თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის მოსახერხებელია სიმრავლეების გამოსახვა სიბრტყეზე წრეების, მართკუთხედების ან სხვა ფიგურების საშუალებით, რაც მნიშვნელოვნად აადვილებს სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების აღქმას. სიმრავლეების ზემოაღნიშნულ გრაფიკულ წარმოდგენას ***ვენის დიაგრამა*** ეწოდება. ვენის დიაგრამა შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიმრავლეების თანაკვეთის, გაერთიანების და დამატების ილუსტრირებისათვის. ნახ. 1.1-1.3-ზე A და B სიმრავლეები გამოსახულია წრეებით, ხოლო უნივერსალური სიმრავლე კი მართკუთხედით. ნახ. 1.1-ზე გამოსახულია A და B სიმრავლეების თანაკვეთა და სხვაობები. ნახ. 1.2-ზე დაშტრიხულია A და B სიმრავლეების გაერთიანება, ხოლო ნახ. 1.3-ზე კი უნივერსალური U სიმრავლის დაშტრიხული ნაწილი წარმოადგენს A სიმრავლის დამატებას.



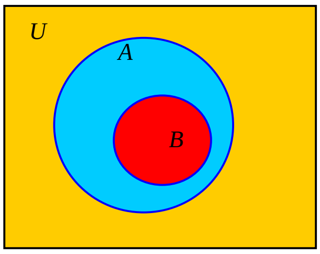
ნახ. 1.1



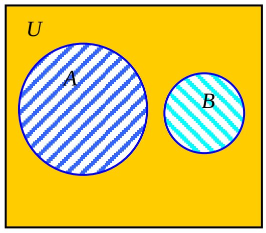
ნახ. 1.2



ნახ. 1.3



ნახ. 1.4



ნახ. 1.5

თუ B სიმრავლე არის A სიმრავლის მკაცრი ქვესიმრავლე, ე.ი. $B\subset A$, მაშინ შესაბამისი ვენის დიაგრამა მიიღებს ნახ. 1.4-ზე მოყვანილ სახეს. თუ A და B სიმრავლეებს არ გააჩნიათ საერთო ელემენტი, ე.ი. $A\cap B=\varnothing$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ***თანაუკვეთი*** სიმრავლეები და ვენის დიაგრამის საშუალებით ისინი გამოსახულია ნახ. 1.5-ზე.

სიმრავლეებზე ზემომოყვანილი ოპერაციები აკმაყოფილებენ გარკვეულ თვისებებს, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობენ ამ ოპერაციების განმარტებებიდან. სახელდობრ, ნებისმიერი A, B და C სიმრავლეებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1. $A\cup B=B\cup A$;
2. $A\cap B=B\cap A$;

თეორემა 1.1. თუ A და B სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B). \tag{1.1}$$

მიღებული ფორმულის გამოყენებით, ამოცანა 1.5-ის პირობებში ჩვენ გვექნება $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=35+52-18=69$, ე.ი. 69 სტუდენტმა აირჩია უმაღლესი მათემატიკის ან საოფისე კომპიუტერული პროგრამების საგანი.

(1.1) ფორმულის კერძო შემთხვევას მივიღებთ მაშინ, როცა $A\cap B=\varnothing$. ამ შემთხვევაში $n(A\cap B)=0$ და სამართლიანია

თეორემა 1.2. თუ A და B თანაუკვეთი სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B). \tag{1.2}$$

ფორმულა (1.2) შეიძლება განზოგადდეს თანაუკვეთი სიმრავლეების ნებისმიერი რაოდენობისთვის.

თეორემა 1.3. თუ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ სასრული სიმრავლეებია, რომელთაგან ნებისმიერი ორი სიმრავლე თანაუკვეთია, მაშინ

$$n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_k). \tag{1.3}$$

თეორემა 1.1-ის ანალოგიური თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს ნებისმიერი სამი სასრული A, B და C სიმრავლე. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.4. თუ A, B და C სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)--n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

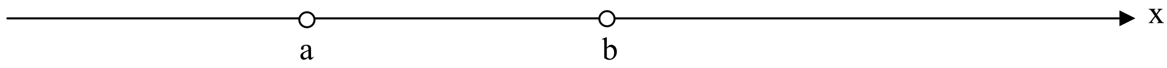
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $(A\cup B)\cap C$ და $(A\cup C)\cap(B\cup C)$, თუ
   ა) $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{1,5,6,7\}$ და $C=\{1,2,4,6,8,9\}$;
   ბ) $A=\{3,6,4,9\}$, $B=\{1,5,8,9,10\}$ და $C=\{-1,-5,7,8\}$;
   გ) $A=\{3,-5,-2,1\}$, $B=\{3,-2,0,7,8\}$ და $C=\{-5,-2,6,7,8\}$;
   დ) $A=\{-1,4,8,9\}$, $B=\{-2,0,6,9\}$ და $C=\{0,-5,8,2,5\}$.

2. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap C$ და $(A\cap B)\cup C$, თუ
   ა) $A=\{$ყვითელი, ლურჯი, მწვანე, ირემი, ციყვი, კურდღელი$\}$,
   $B=\{$მწვანე, ციყვი, მატარებელი$\}$, $C=\{$ლურჯი, აქლემი, კურდღელი, მელია, ლომი$\}$;
   ბ) $A=\{a,b,c,d,-5,-7,8\}$, $B=\{b,c,-7,0,$წითელი$\}$, $C=\{$ლომი, თაგვი, a, b, -7, 0, f$\}$.

3. დაადგინეთ რომელი სიმრავლე რომელი სიმრავლის ქვესიმრავლეა
   ა) $A=\{$ფორთოხალი, ვაშლი, ქლიავი, ატამი$\}$, $B=\{$ქლიავი, ბროწეული, ალუბალი$\}$,
   $C=\{$ვაშლი, ატამი$\}$;
   ბ) $A=\{$ირემი, ჯიხვი, სპილო, მაიმუნი, ლომი$\}$, $B=\{$ირემი, მაიმუნი, ჯიხვი, ლომი$\}$
   $C=\{$ჯიხვი, სპილო, დათვი$\}$;
   გ) $A=\{$წრე, კუბი, მართკუთხედი, $a, b\}$,
   $B=\{$წრე, კუბი, მართკუთხედი, სამკუთხედი, $a, b, c, d\}$,
   $C=\{$კუბი, წრე, სფერო, პირამიდა, $f, g\}$;
   დ) $A=\{-1,-5,0,5,-8\}$, $B=\{-1,-6,-5,-8\}$, $C=\{-3,5,0\}$.

<u>განმარტება 2.1.</u> a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, **ღია შუალედი** ანუ **ინტერვალი** ეწოდება და აღინიშნება ასე (a,b) (ნახ. 3). ამრიგად, შუალედი არის ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $a < x < b$.

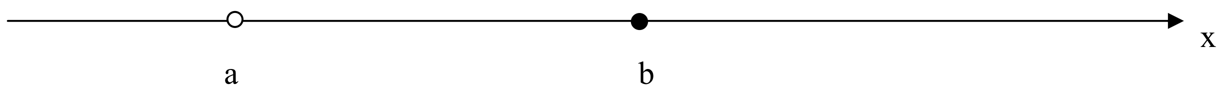


ნახ. 3

რიცხვთა ღერძზე (a,b)-ს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია a და b და რომლებიც არ ეკუთვნიან ამ მონაკვეთს.

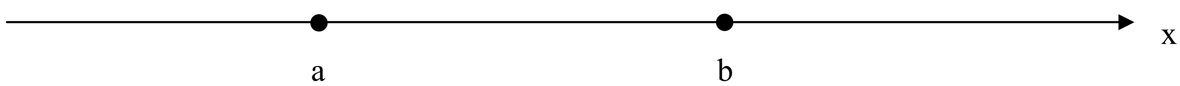
ყველა იმ x ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $a \le x < b$ (ნახ. 4) ან $a < x \le b$ (ნახ. 5) ეწოდება **ნახევარსეგმენტი** და აღინიშნება შესაბამისად შემდეგნაირად: $[a,b)$ და $(a,b]$

ნახ. 4



ნახ. 5

<u>განმარტება 2.2.</u> a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს a და b რიცხვების ჩათვლით ეწოდება **სეგმენტი** ანუ **ჩაკეტილი შუალედი** და აღინიშნება ასე: $[a,b]$. ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე $[a,b]$-ს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია a და b და რომლებიც ეკუთვნიან ამ მონაკვეთს. ამრიგად, სეგმენტი არის ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს: $a \le x \le b$



ნახ. 6

შუალედი შეიძლება იყოს უსასრულო. მაგალითად, ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (ანუ რიცხვთა მთელი ღერძი) უსასრულო შუალედია, რომელიც აღინიშნება ასე: $(-\infty,+\infty)$. ყველა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნება უსასრულო შუალედი: $(0,+\infty)$, ხოლო ყველა ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $x \ge a$ უტოლობას, აღინიშნება ასე: $[a,+\infty)$. ანალოგიურად განისაზღვრება $(-\infty,a)$ შუალედი.

რიცხვის მეასედ ნაწილს მისი პროცენტი ეწოდება. რიცხვის ერთი პროცენტი აღინიშნება სიმბოლოთი – 1%, ხოლო k პროცენტი კი – სიმბოლოთი $k\%$.

განვიხილოთ შემდეგი სამი ტიპის ამოცანა:

1. **რიცხვის პროცენტის პოვნა.** იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რიცხვის $k\%$, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ $\dfrac{k}{100}$-ზე.

<u>ამოცანა 2.1.</u> იპოვეთ 50-ის 36%.

<u>ამოხსნა.</u> განმარტების თანახმად 50-ის 36% ტოლია $50 \cdot \dfrac{36}{100} = 50 \cdot \dfrac{9}{25} = 2 \cdot 9 = 18.$.

2. **რიცხვის პოვნა მისი პროცენტის საშუალებით.** იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რომელი რიცხვის $k\%$–ს წარმოადგენს მოცემული რიცხვი, საჭიროა იგი გავამრავლოთ $\dfrac{100}{k}$ – ზე.

<u>ამოცანა 2.2.</u> რიცხვის 24% არის 36. იპოვეთ ეს რიცხვი

<u>ამოხსნა.</u> განმარტების თანახმად გვექნება $36 \cdot \dfrac{100}{24} = 3 \cdot \dfrac{100}{2} = 150$. ე. ი. საძიებელი რიცხვი ყოფილა 150.